Fonctions polynômes

Fonctions polynômes 1
1. Définitions et propriétés 2
2. Factoriser par $\boldsymbol{x-a}$ 5
3. Les fonctions affines 7
4. Les polynômes du second degré 8
5. Résolutions d'équations et inéquations avec des polynômes 10
6. Fonctions rationnelles 13
7. Polynômes du type $\boldsymbol{ax4+bx2+c}$ 14
8. Déterminer les coefficients d'un polynômes 15

1. Définitions et propriétés

Définition

Une fonction polynôme est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Où n est un entier naturel et a_0, a_1, …, a_n sont des nombres réels.
Dans ce chapitre, on dira « polynôme » pour « fonction polynôme ».

a_0, a_1, …, a_n sont appelés les coefficients du polynôme.

a_0 est le terme constant
a_1 est le coefficients de x
a_2 est le coefficients de x^2
…
a_n est le coefficients de x^n

Soit un polynôme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
Alors, le degré de ce polynôme est égal à n.
Le degré du polynôme $x \mapsto 0$ est égal à $-\infty$.
On appelle ce polynôme, le polynôme nul.

Exercice 1

Donner le degré du polynôme et la valeur de ses coefficients.

a) $x \mapsto 3x^2 - 1x + 4$
b) $x \mapsto 3x - 4$
c) $x \mapsto 5$
d) $x \mapsto -5x^7 - 2x^4 - 6x + 3$
e) $x \mapsto 2x^5$
f) $x \mapsto 0$

Solution de l'exercice 1

a) $degré = 2$, $a_2 = 3$, $a_1 = -1$, $a_0 = 4$
b) $degré = 1$, $a_1 = 3$, $a_0 = -4$
c) $degré = 0$, $a_0 = 5$
Remarque : c'est un monôme de degré 0
d) $degré = 7$, $a_7 = -5$, $a_6 = a_5 = 0$, $a_4 = -2$, $a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = -6$, $a_0 = 3$
e) $degré = 5$, $a_5 = 2$
Remarque : c'est un monôme de degré 5
f) $degré = -\infty$

Théorème

Soit un polynôme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
ssi
$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0.$$

Proof
⇐: trivial.
⇒: on admet cette implication.
c.q.f.d.

Théorème

Deux polynômes sont égaux ssi ils ont les même coefficients.
Proof
⇐
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
$f(x) - g(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0 = 0$
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$
⇒
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = 0$
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$
$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$
$a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} = \cdots = a_1 - b_1 = a_0 - b_0 = 0$
$a_n = b_n$ et $a_{n-1} = b_{n-1}$ et … et $a_1 = b_1$ et $a_0 = b_0$
c.q.f.d.

Définition

Pour tout réel a et polynôme f :

a est racine de f ssi $f(a) = 0$.

Définition

Pour tout réel a et polynôme f :

f est factorisable (ou divisible) par $(x - a)$

ssi

il existe un polynôme g tel que pour tout réel x, $f(x) = (x - a)g(x)$.

Théorème

Pour tout réel a et polynôme f :

$f(a) = 0$ ssi f est factorisable par $(x - a)$.

Proof

$\Leftarrow$

f est factorisable par $(x - a)$

$f(x) = (x - a)g(x)$ pour un certain g

$f(a) = (a - a)g(a) \ = 0$

$\Rightarrow$

Prouvons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $x^n - a^n$ est factorisable par $x - a$.

$(x - a)(x^{n-1} + a\, x^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

$= (x^n + a\, x^{n-1} + \cdots + a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x) - (a\, x^{n-1} + a^2\, x^{n-2} + \cdots + a^{n-1}x + a^n)$

$= x^n - a^n$

Prouvons que pour tout réel a, tout polynôme f,

il existe un polynôme g tel que $f(x) = (x - a)g(x) + f(a)$ pour tout réel x.

$f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

$f(a) = b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \cdots + b_2 a^2 + b_1 a + b_0$

$f(x) - f(a) = b_n(x^n - a^n) + b_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + b_2(x^2 - a^2) + b_1(x - a)$

$f(x) - f(a) = b_n(x - a)g_n(x) + b_{n-1}(x - a)g_{n-1}(x) + \cdots + b_2(x - a)g_2(x) + b_1(x - a)$

où g_n, g_{n-1}, …, g_2 sont des polynômes

$f(x) = (x - a)(b_n g_n(x) + b_{n-1}g_{n-1}(x) + \cdots + b_2 g_2(x) + b_1) + f(a)$

$f(x) = (x - a)g(x) + f(a)$

$f(x) = (x - a)g(x) + f(a)$ pour un certain polynôme g

$f(a) = 0$

$f(x) = (x - a)g(x)$ pour un certain polynôme g

c.q.f.d.

2. Factoriser par $x - a$

Exercice 1

f est le polynôme défini par $f(x) = -2x^4 + 6x^2 + 6x - 4$. Après avoir vérifié que 2 est une racine de f, factorisez f par $(x - 2)$.

Solution de l'exercice 1

$f(x) = (x - 2)(-2x^3 - 4x^2 - 2x + 2)$

Solution détaillée de l'exercice 1

Vérifions que 2 est une racine de f.

$$\begin{aligned} f(2) &= -2(2)^4 + 6(2)^2 + 6(2) - 4 \\ &= -32 + 24 + 12 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, 2 est une racine du polynôme f.

Factorisons f par $(x - 2)$ par la division euclidienne.

$$\begin{array}{l|l} -2x^4 + 6x^2 + 6x - 4 & x - 2 \\ \cline{2-2} -(-2x^4 + 4x^3) & -2x^3 - 4x^2 - 2x + 2 \\ \hline -4x^3 + 6x^2 + 6x - 4 & \\ -(-4x^3 + 8x^2) & \\ \hline -2x^2 + 6x - 4 & \\ -(-2x^2 + 4x) & \\ \hline 2x - 4 & \\ -(2x - 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{-2x^4 + 6x^2 + 6x - 4}{x - 2} = -2x^3 - 4x^2 - 2x + 2$$

$-2x^4 + 6x^2 + 6x - 4 = (x - 2)(-2x^3 - 4x^2 - 2x + 2)$

$f(x) = (x - 2)(-2x^3 - 4x^2 - 2x + 2)$

Factorisons f par $(x-2)$ par identification des coefficients.

$f(x) \quad = (x-2)(ax^3+bx^2+cx+d)$
$\quad\quad = ax^4+bx^3+cx^2+dx-2ax^3-2bx^2-2cx-2d$
$\quad\quad = ax^4+(b-2a)x^3+(c-2b)x^2+(d-2c)x-2d$

$f(x) = -2x^4+6x^2+6x-4$

Par identification des coefficients :

$a=-2$
$b-2a=0$
$c-2b=6$
$d-2c=6$
$-2d=-4$

Donc, $b=2a=2(-2)=-4$
$c=6+2b=6+2(-4)=-2$
$d=2.$

$f(x) \quad = (x-2)(-2x^3-4x^2-2x+2)$

Factorisons f par $(x-2)$ par la méthode de Hörner.

	-2	0	6	6	-4
2		-4	-8	-4	4
	-2	-4	-2	2	0

$f(x) \quad = (x-2)(-2x^3-4x^2-2x+2)$

3. Les fonctions affines

Exercice 1

Les fonctions affines

Associer chaque fonction à sa courbe, et chaque courbe à son tableau des signes.

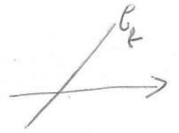
ⓐ $f(x) = 2x - 1$

①


ⓐ (α)

x	$-\infty$ x_1 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$

ⓑ $f(x) = -2x - 1$

②


(β)

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$-$

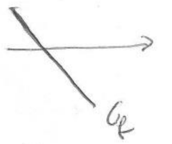
ⓒ $f(x) = 2$

③


(γ)

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$

ⓓ $f(x) = -2$

④


(δ)

x	$-\infty$ x_1 $+\infty$
$f(x)$	$+$ 0 $-$

Solution :

a		
b		
c		
d		

Solution de l'exercice 1

a	2	α
b	4	δ
c	1	γ
d	3	β

4. Les polynômes du second degré

Exercice 1

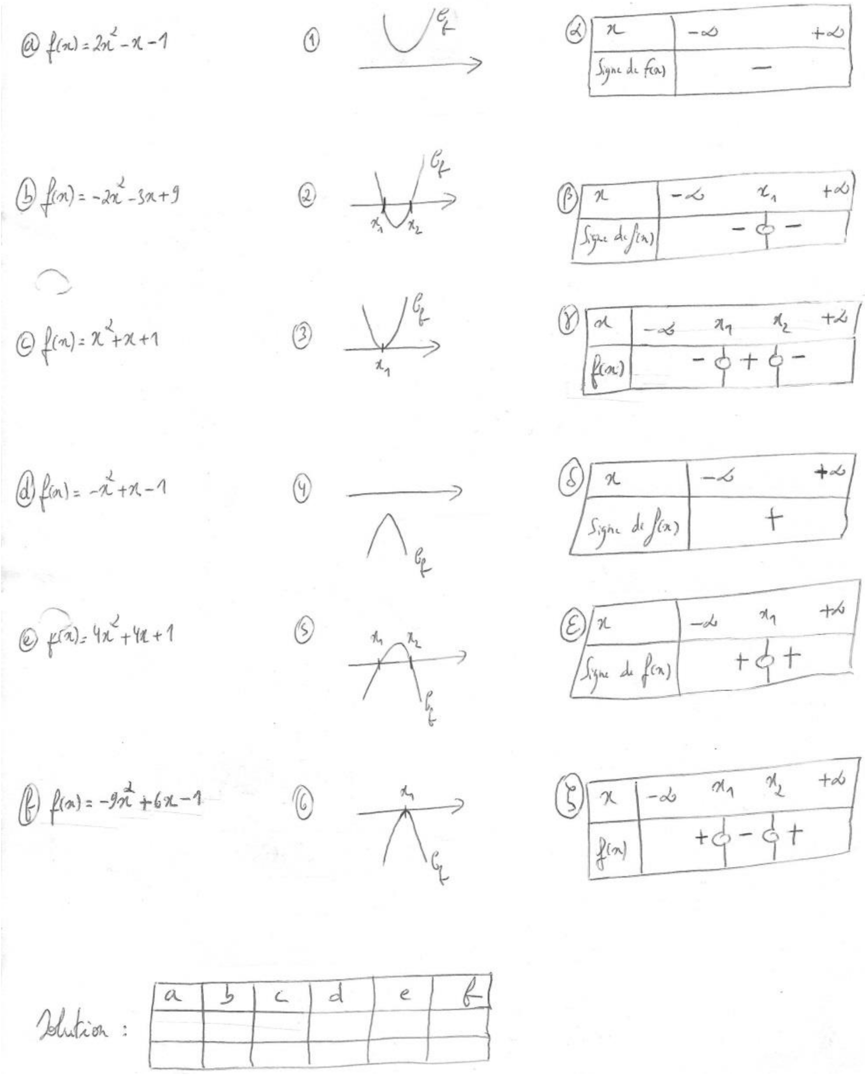
PARTIE A

Compléter le tableau ci-dessous.

$f(x) = ax^2 + b\,x + c$	Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.	Calculer les racines : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$ $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$ Il n'y a pas de racine si $\Delta < 0$.	Factoriser f : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$ $f(x) = a(x - x_1)^2$ si $\Delta = 0$ f n'est pas factorisable si $\Delta < 0$.
$f(x) = 2x^2 - x - 1$			
$f(x) = -2x^2 - 3x + 9$			
$f(x) = x^2 + x + 1$			
$f(x) = -x^2 + x - 1$			
$f(x) = 4x^2 + 4x + 1$			
$f(x) = -9x^2 + 6\,x - 1$			

PARTIE B

Associer chaque fonction à sa courbe. Ensuite, associer chaque courbe à son tableau de signe. Justifier.
Remarque : les fonctions sont les même qu'à la partie A.



Solution de l'exercice 1

PARTIE A

$f(x) = 2x^2 - x - 1$	$\Delta = 9$	$x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{-1}{2}$	$f(x) = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$
$f(x) = -2x^2 - 3x + 9$	$\Delta = 81$	$x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = -3$	$f(x) = -2(x-\frac{3}{2})(x+3)$
$f(x) = x^2 + x + 1$	$\Delta = -3$	Il n'y a pas de racine.	f n'est pas factorisable.
$f(x) = -x^2 + x - 1$	$\Delta = -3$	Il n'y a pas de racine.	f n'est pas factorisable.
$f(x) = 4x^2 \mp 4x + 1$	$\Delta = 0$	$x_1 = \frac{-1}{2}$	$f(x) = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
$f(x) = -9x^2 + 6\,x - 1$	$\Delta = 0$	$x_1 = \frac{1}{3}$	$f(x) = -9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

PARTIE B

a	b	c	d	e	f
2 car $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$	5 car $\begin{cases} a = -2 < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$	1 car $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$	4 car $\begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$	3 car $\begin{cases} a = 4 > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$	6 car $\begin{cases} a = -9 < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
ζ	γ	δ	α	ε	β

Exercice 2 (à faire avec le professeur)

- Calculer le Δ de f.
- Dessiner un schéma de f .
- Calculer les racines de f.
- Factoriser f .
- Dresser le tableau de signe de f.

a) $f(x) = 6x^2 - 4x - 2$
b) $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$
c) $f(x) = 2x^2 + x + 3$
d) $f(x) = -2x^2 - 3x + 5$
e) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$
f) $f(x) = -5x^2 - 2x - 1$

Exercice 3 (à faire avec le professeur)

- Dessiner un schéma de f .
- Déterminer les racines de f.
- Dresser le tableau de signe de f.

a) $f(x) = 4x - 5$
b) $f(x) = 10$
c) $f(x) = -3x + 7$
d) $f(x) = -8$

5. Résolutions d'équations et inéquations avec des polynômes

Exercice 1

Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = -3x^3 + 19x^2 - 30x + 8$.

1) Calculer $f(2)$. Que peut-on en déduire ?
2) Calculer $f(-1)$. Que peut-on en déduire ?
3) Factoriser f au maximum.
4) Développer la forme factorisée de f obtenue ci-dessus pour vérifier qu'elle est égale à la forme non factorisée.
5) Déduire de 3) les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
6) Dresser le tableau du signe de f.
7) Déduire les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 2

Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x - 2$.

1) Calculer $f(1)$. Que peut-on en déduire ?
2) Calculer $f(-1)$. Que peut-on en déduire ?
3) Factoriser f au maximum.
4) Développer la forme factorisée de f obtenue ci-dessus pour vérifier qu'elle est égale à la forme non factorisée.
5) Déduire de 3) les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
6) Dresser le tableau du signe de f.
7) Déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 3

Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 18$.

1) Calculer $f(1)$. Que peut-on en déduire ?
2) Calculer $f(-2)$. Que peut-on en déduire ?
3) Factoriser f au maximum.
4) Développer la forme factorisée de f obtenue ci-dessus pour vérifier qu'elle est égale à la forme non factorisée.
5) Déduire de 3) les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
6) Dresser le tableau du signe de f.
7) Déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 4

Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 24x + 18$.

1) Calculer $f(-3)$. Que peut-on en déduire ?
2) Calculer $f(-1)$. Que peut-on en déduire ?
3) Factoriser f au maximum.
4) Développer la forme factorisée de f obtenue ci-dessus pour vérifier qu'elle est égale à la forme non factorisée.
5) Déduire de 3) les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
6) Dresser le tableau du signe de f.
7) Déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 5

Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = 8x^3 - 18x^2 + x + 6$.

1) Calculer $f(1)$. Que peut-on en déduire ?
2) Calculer $f(2)$. Que peut-on en déduire ?
3) Factoriser f au maximum.
4) Développer la forme factorisée de f obtenue ci-dessus pour vérifier qu'elle est égale à la forme non factorisée.
5) Déduire de 3) les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
6) Dresser le tableau du signe de f.
7) Déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 6

Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = -4x^3 + 24x^2 - 45x + 25$.

1) Calculer $f(-2)$. Que peut-on en déduire ?
2) Calculer $f(1)$. Que peut-on en déduire ?
3) Factoriser f au maximum.
4) Développer la forme factorisée de f obtenue ci-dessus pour vérifier qu'elle est égale à la forme non factorisée.
5) Déduire de 3) les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
6) Dresser le tableau du signe de f.
7) Déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Solutions

1.5) $S = \left\{\frac{1}{3}; 2; 4\right\}$ 1.7) $S = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[\cup]2; 4[$ 2.5) $S = \{-1; 1\}$ 2.7) $S = [-1; 1]$ 3.5) $S = \{-2; 3\}$ 3.7) $S =]-2; 3[\cup]3; +\infty[$ 4.5) $S = \{-3\}$ 4.7) $S =]-\infty; -3]$5.5) $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 2\right\}$ 5.7) $S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty[$ 6.5) $S = \left\{1; \frac{5}{2}\right\}$ 6.7) $S =]-\infty; 1] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

6. Fonctions rationnelles

Exercice 1

Soit P la fonction polynôme définie par $P(x) = -4x^3 - 19x^2 + 29x - 6$.
Soit Q la fonction polynôme définie par $Q(x) = -3x^4 - 6x^3 + 3x + 6$.
Soit f la fonction rationnelle définie par $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

On admet que :

- $\mathrm{P(x)} = -4(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+6)\left(\mathrm{x}-\frac{1}{4}\right)$
- $\mathrm{Q(x)} = (\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+2)(-3\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}-3)$
- Le Δ de $-3\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 3$ est strictement négatif.

a) Résoudre l'équation $Q(x) = 0$.
b) En déduire D_f, le domaine de définition de f.
c) Montrez que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \frac{(x+6)(1-4x)}{-3(x^2+x+1)(x+2)}$.
d) Déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Solution de l'exercice 1

a) $S = \{1, -2\}$
b) $D_f = \mathbb{R} - \{1, -2\}$
d) $S = [-6; -2[\cup \left[\frac{1}{4}; 1\right[\cup]1; +\infty[$

Exercice 2

Soit P la fonction polynôme définie par $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 26x - 8$.
Soit Q la fonction polynôme définie par $Q(x) = -4x^3 + 12x^2 + 15x + 4$.
Soit f la fonction rationnelle définie par $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

On admet que :

- $\mathrm{P(x)} = 3\left(\mathrm{x}+\frac{1}{3}\right)(\mathrm{x}-4)(\mathrm{x}+2)$
- $\mathrm{Q(x)} = -(2\mathrm{x}+1)^2(\mathrm{x}-4)$

a) Résoudre l'équation $Q(x) = 0$.
b) En déduire D_f, le domaine de définition de f.
c) Montrez que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \frac{(3x+1)(x+2)}{-(2x+1)^2}$.
d) Déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Solution de l'exercice 2

a) $S = \left\{\frac{-1}{2}, 4\right\}$
b) $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}, 4\right\}$
d) $S =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1}{3}; 4\right[\cup]4; +\infty[$

7. Polynômes du type $ax^4 + bx^2 + c$

Exercice 1 (facultatif)

Factoriser la fonction polynôme f au maximum.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
b) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$
c) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
d) $f(x) = -3x^4 + 2x^2 + 1$

Solutions de l'exercice 1

a) $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2+1)$
b) $f(x) = (x-3)(x+3)(x^2+1)$
c) $f(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$
d) $f(x) = (-3x^2-1)(x-1)(x+1)$

8. Déterminer les coefficients d'un polynômes

Exercice 1 (facultatif)

Soit $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ où a, b, c, d et e sont des réels.

On a : le terme constant de P est 2
il n'y a pas de monôme de degré 3
$P(1) = -1$
$P(-1) = 9$
$P(-2) = -4$
Déterminer les coefficients de P.

Solution de l'exercice 1

$P(x) = -2x^4 + 4x^2 - 5x + 2$

Exercice 2 (facultatif)

Soit $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ où a, b, c, d et e sont des réels.

On a : le terme constant de P est -8
il n'y a pas de monôme de degré 2
$P(1) = -4$
$P(-1) = -8$
$P(-2) = 26$
Déterminer les coefficients de P.

Solution de l'exercice 2

$P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x - 8$

Solution détaillée de l'exercice 1

$P(x) \quad = ax^4 + cx^2 + dx + 2$

$P(1) = -1$

$a(1)^4 + c(1)^2 + d(1) + 2 = -1$

$a + c + d = -3$

$P(-1) = 9$

$a(-1)^4 + c(-1)^2 + d(-1) + 2 = 9$

$a + c - d = 7$

$P(-2) = -4$

$a(-2)^4 + c(-2)^2 + d(-2) + 2 = -4$

$16a + 4c - 2d = -6$

$8a + 2c - d = -3$

$$\begin{cases} a + c + d = -3 & (1) \\ a + c - d = 7 & (2) \\ 8a + 2c - d = -3 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2)$: $\quad a + c + d + (a + c - d) = -3 + 7$

$2a + 2c = 4$

$a + c = 2$

$a = 2 - c \qquad (4)$

$(1) - (2)$: $\quad a + c + d - (a + c - d) = -3 - 7$

$2d = -10$

$d = -5$

Remplaçons a et d dans (3) : $\quad 8a + 2c - d = -3$

$8(2 - c) + 2c - (-5) = -3$

$16 - 8c + 2c + 5 = -3$

$21 - 6c = -3$

$-6c = -24$

$c = 4.$

Remplaçons c dans (4) : $\quad a = 2 - c$

$a = 2 - 4$

$a = -2$

$P(x) = -2x^4 + 4x^2 - 5x + 2$